考虑如下形式的随机微分方程

$$\partial_t x = f(x) + \xi(t) \tag{1}$$

其中，$f(x)$ 是动力学过程中的非线性函数，$\xi(t)$ 是噪声。采用 Ito 约定，将方程离散化为

$$\psi(x_t) \equiv x_t - \left[x_{t-1} + f(x_{t-1})\Delta t + \xi_t \Delta t + x_0 \delta_{t0}\right] = 0 \tag{2}$$

我们的目标是得到 x 的动力学路径的概率分布 $P[x(t)]$，其离散化形式可以写为

$$p(x_1, \cdots, x_N) = \prod_{t=1}^{N} \int \mathrm{d}\xi_t\, \rho(\xi_t)\, \delta\big(x_t - x_t^\star(x_{t-1}, \xi_t)\big) \tag{3}$$

其中 $x_t^\star(x_{t-1}, \xi_t)$ 是方程 (2) 的解，也就是函数 $\psi(x_t) = 0$ 的零点，并且是唯一的。利用狄拉克 δ 函数的复合性质以及其傅里叶积分表示，可以得到

$$\delta\big(x_t - x_t^\star(x_{t-1}, \xi_t)\big) = |\psi'(x_t)|\, \delta\big(\psi(x_t)\big) = \delta\big(\psi(x_t)\big) = \int \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_t}{2\pi i}\, e^{\tilde{x}_t \psi(x_t)} \tag{4}$$

因此可以将式 (3) 改写为

$$\begin{aligned}
&p(x_1, \cdots, x_N) \\
&= \prod_t \int \mathrm{d}\xi_t\, \rho(\xi_t) \int \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_t}{2\pi i}\, e^{\tilde{x}_t \psi(x_t)} && \text{(5a)}\\
&= \prod_t \int \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_t}{2\pi i} \left[\int \mathrm{d}\xi_t\, e^{-\tilde{x}_t \xi_t \Delta t} \rho(\xi_t)\right] \exp\left[\tilde{x}_t\big(x_t - x_{t-1} - f(x_{t-1})\Delta t - x_0 \delta_{t0}\big)\right] && \text{(5b)}\\
&= \int \left[\prod_t \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_t}{2\pi i}\right]\left[\prod_t \int \mathrm{d}\xi_t\, e^{-\tilde{x}_t \xi_t \Delta t} \rho(\xi_t)\right] \exp\left[\sum_t \tilde{x}_t \left(\frac{x_t - x_{t-1}}{\Delta t} - f(x_{t-1}) - x_0 \frac{\delta_{t0}}{\Delta t}\right)\Delta t\right] && \text{(5c)}
\end{aligned}$$

在 $N \to \infty$，$\Delta t \to 0$ 的极限下，利用 $\frac{x_t - x_{t-1}}{\Delta t} \to \partial_t x$，$\frac{\delta_{t0}}{\Delta t} \to \delta(t)$ 和 $\sum_{t=1}^N \Delta t \to \int \mathrm{d}t$，并且定义噪声过程的矩生成泛函

$$Z_\xi[-\tilde{x}(t)] = \lim_{N\to\infty} \prod_t \int \mathrm{d}\xi_t\, e^{-\tilde{x}_t \xi_t \Delta t} \rho(\xi_t) \tag{6}$$

可以将 $p(x_1, \cdots, x_N)$ 重新写回连续形式

$$p[x(t)] = \int D\tilde{x}\, Z_\xi[-\tilde{x}(t)] \exp\left[\int \mathrm{d}t\, \tilde{x}\big(\partial_t x - f(x) - x_0 \delta(t)\big)\right] \tag{7}$$

为了得到概率分布 $p[x(t)]$ 中的统计量，我们可以定义所谓的矩生成泛函

$$\begin{aligned}
Z[j(t)] &\equiv \int Dx\, e^{\int j(t) x(t)\, \mathrm{d}t}\, p[x(t)] && \text{(8a)}\\
&= \int Dx \int D\tilde{x}\, Z_\xi[-\tilde{x}(t)] \exp\left\{\int \mathrm{d}t \left[\tilde{x}\big(\partial_t x - f(x) - x_0 \delta(t)\big) + jx\right]\right\} && \text{(8b)}
\end{aligned}$$

其中 $j(t)$ 被称为源场。更一般地，我们可以给系统 (1) 施加一个扰动场 $\tilde{j}(t)$，动力学方程改写为

$$\partial_t x = f(x) - \tilde{j}(t) + \xi(t) \tag{9}$$

通过替换 $f(x) \to f(x) - \tilde{j}(t)$，可以得到包含扰动场的矩生成泛函

$$Z[j,\tilde{j}] = \int Dx \int D\tilde{x}\; Z_\xi[-\tilde{x}] \exp\left\{\int \mathrm{d}t\, \left[\tilde{x}\Big(\partial_t x - f(x) - x_0\delta(t)\Big) + jx + \tilde{j}\tilde{x}\right]\right\} \tag{10}$$

将与动力学方程本身有关的项定义为作用量

$$S[x,\tilde{x}] = \int \mathrm{d}t\; \tilde{x}\Big(\partial_t x - f(x) - x_0\delta(t)\Big) \tag{11}$$

将噪声的矩生成泛函用其累积生成泛函表示

$$W_\xi[-\tilde{x}(t)] = \ln Z_\xi[-\tilde{x}(t)] = \lim_{N\to\infty} \ln \prod_t \int \mathrm{d}\xi_t\, e^{-\tilde{x}_t\xi_t\Delta t}\rho(\xi_t) \tag{12}$$

这样，生成泛函写为

$$Z[j,\tilde{j}] = \int D[x,\tilde{x}]\; \exp\Big(S[x,\tilde{x}] + W_\xi[-\tilde{x}] + j^\top x + \tilde{j}^\top\tilde{x}\Big) \tag{13}$$

*** *** *** *** ***

对于常见的高斯白噪声，我们一般写为如下形式

$$\langle\xi(t)\rangle = 0 \qquad \langle\xi(t)\xi(t')\rangle = g^2\delta(t-t') \tag{14}$$

采用 $\delta(t-t') \to \frac{1}{\Delta t}$ 的离散化方案，ξ_t 的方差为 $g^2/\Delta t$，概率密度写为

$$\rho(\xi_t) = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2\pi}g}\exp\left(-\frac{\xi_t^2\Delta t}{2g^2}\right) \tag{15}$$

因此噪声的矩生成泛函为

$$\begin{aligned}
Z_\xi[-\tilde{x}] &= \lim_{N\to\infty}\prod_t\int \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2\pi}g}\mathrm{d}\xi_t\, e^{-\tilde{x}_t\xi_t\Delta t}\exp\left(-\frac{\xi_t^2\Delta t}{2g^2}\right) && \text{(16a)}\\
&= \lim_{N\to\infty}\prod_t\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}g}\mathrm{d}\big(\xi_t\sqrt{\Delta t}\big)\, e^{-\tilde{x}_t\xi_t\Delta t}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{g^2}\big(\xi_t\sqrt{\Delta t}\big)^2 - \tilde{x}_t\sqrt{\Delta t}\big(\xi_t\sqrt{\Delta t}\big)\right] && \text{(16b)}\\
&= \lim_{N\to\infty}\prod_t \exp\left(\frac{1}{2}g^2\tilde{x}_t^2\Delta t\right) && \text{(16c)}\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}g^2\int\tilde{x}^2(t)\,\mathrm{d}t\right) && \text{(16d)}
\end{aligned}$$

噪声累积生成泛函为

$$W_\xi[-\tilde{x}] = \frac{1}{2}g^2\int\tilde{x}^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

考虑一个具有如下形式动力学方程的随机循环神经网络

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -x_i + \sum_{j=1}^N J_{ij}\phi(x_j) + \xi_i \tag{1}$$

其中非线性函数 $\phi(x)=\tanh(x)$，J_{ij} 是神经元之间的耦合强度，ξ_i 是高斯白噪声，满足

$$J_{ii}=0 \qquad \langle J_{ij}\rangle=0 \qquad \langle J_{ij}^2\rangle=(1-\delta_{ij})\frac{J^2}{N} \tag{2}$$

$$\langle \xi_i(t)\rangle=0 \qquad \langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle=g^2\delta_{ij}\delta(t-t') \tag{3}$$

给定一个耦合矩阵 $\mathbf{J}$，可以写出矩生成泛函

$$Z[\mathbf{j},\mathbf{j}](\mathbf{J})=\int\mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\ \exp\left\{\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}-\sum_i\int \mathrm{d}t\ \tilde{x}_i(t)\sum_j J_{ij}\phi\big(x_j(t)\big)\right\} \tag{4}$$

其中定义了

$$\mathbf{S}=\sum_i\int\mathrm{d}t\left[\tilde{x}_i(\partial_t+1)x_i+\frac{1}{2}g^2\tilde{x}_i^2\right] \tag{5}$$

将矩生成泛函做关于 $\mathbf{J}$ 的无序平均，可以得到

$$\overline{Z[\mathbf{j},\mathbf{j}]}\equiv\langle Z[\mathbf{j},\mathbf{j}](\mathbf{J})\rangle_{\mathbf{J}}=\int\prod_{i,j}\mathrm{d}J_{ij}\,P(J_{ij})\,Z[\mathbf{j},\mathbf{j}](\mathbf{J}) \tag{6a}$$

$$=\int\mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\ \exp\left(\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}\right)\underbrace{\int\prod_{i,j}\mathrm{d}J_{ij}\,e^{-\sum_{i,j}J_{ij}\int\mathrm{d}t\,\tilde{x}_i\phi(x_j)}\,P(J_{ij})}_{\equiv Z_0} \tag{6b}$$

其中

$$Z_0=\prod_{i\neq j}\int\mathrm{d}J_{ij}\ \exp\left\{-\frac{J_{ij}^2}{2J^2/N}-J_{ij}\int\mathrm{d}t\ \tilde{x}_i\phi(x_j)\right\} \tag{7a}$$

$$=\exp\left\{\frac{J^2}{2N}\sum_{i\neq j}\left(\int\mathrm{d}t\ \tilde{x}_i\phi(x_j)\right)^2\right\} \tag{7b}$$

$$=\exp\left\{\frac{J^2}{2N}\sum_{i\neq j}\iint\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\ \tilde{x}_i^t\,\phi_j^t\,\tilde{x}_i^{t'}\,\phi_j^{t'}\right\} \tag{7c}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\iint\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\left[\left(\sum_i\tilde{x}_i^t\,\tilde{x}_i^{t'}\right)\left(\frac{J^2}{N}\sum_j\phi_i^t\,\phi_i^{t'}\right)\right]\right\} \tag{7d}$$

式 (7c) 中的被积函数可以利用 $\sum_{i\neq j}x_iy_j=\sum_{i,j}x_iy_j-\sum_i x_iy_i=\sum_i x_i\sum_j y_j-\sum_i x_iy_i$ 拆分为两项，第二项相比第一项是一个 $\mathcal{O}(1/N)$ 的小量，可以略去。因此

$$\overline{Z[\mathbf{j},\mathbf{j}]}=\int\mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\ \exp\left\{\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\frac{1}{2}\iint\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\left[\left(\sum_i\tilde{x}_i^t\,\tilde{x}_i^{t'}\right)\left(\frac{J^2}{N}\sum_j\phi_i^t\,\phi_i^{t'}\right)\right]\right\} \tag{8}$$

引入序参量

$$Q(t,t')=\frac{J^2}{N}\sum_j\phi_i^t\,\phi_i^{t'} \tag{9}$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
&\overline{Z[\mathbf{j},\mathbf{j}]}\\
&=\int \mathcal{D}Q\ \delta\Big(-\frac{N}{J^2}Q(t,t')+\sum_j \phi_i^t\,\phi_i^{t'}\Big)\int \mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\ \exp\Big(\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}\Big)\\
&\quad\times\exp\left\{\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\Big[\Big(\sum_i \tilde{x}_i^t\tilde{x}_i^{t'}\Big)\Big(\frac{J^2}{N}\sum_j \phi_i^t\phi_i^{t'}\Big)\Big]\right\} &(10a)\\
&=\int \mathcal{D}[Q,\widehat{Q}]\ \exp\left\{\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\ \widehat{Q}(t,t')\Big[-\frac{N}{J^2}Q(t,t')+\sum_j \phi_i^t\,\phi_i^{t'}\Big]\right\}\\
&\quad\times\int \mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\ \exp\left\{\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\ Q(t,t')\sum_i \tilde{x}_i^t\,\tilde{x}_i^{t'}\right\} &(10b)\\
&=\int \mathcal{D}[Q,\widehat{Q}]\ \exp\Big(-\frac{N}{J^2}Q^\top\widehat{Q}\Big)\int \mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\ \exp\Big(\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\frac{1}{2}(\mathbf{x}^t)^\top Q\,\mathbf{x}_{t'}+(\phi^t)^\top\widehat{Q}\,\phi^{t'}\Big) &(10c)
\end{aligned}
$$

注意到式 (10c) 的第二项积分中已经将不同神经元解耦，可以将其写为

$$
N\ln Z[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}]=\sum_i \ln\int \mathcal{D}[\tilde{x}_i,x_i]\exp\Big(S_i+j_i^\top x_i+\tilde{j}_i^\top\tilde{x}_i+\frac{1}{2}(\tilde{x}_i^t)^\top Q\,\tilde{x}_i^{t'}+(\phi_i^t)^\top\widehat{Q}\,\phi_i^{t'}\Big) \tag{11}
$$

因此有

$$
\overline{Z[j,\tilde{j}]}=\int \mathcal{D}[Q,\widehat{Q}]\,e^{N\mathcal{L}[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}]} \tag{12}
$$

其中

$$
\mathcal{L}[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}]=-\frac{N}{J^2}Q^\top\widehat{Q}+\ln Z[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}] \tag{13}
$$

在 $N\to\infty$ 的极限下，利用 Laplace 方法可以求解式 (12) 中的积分

$$
\overline{Z[j,\tilde{j}]}=e^{N\mathcal{L}[j,\tilde{j};Q^\star,\widehat{Q}^\star]} \tag{14}
$$

其中 $Q^\star$ 和 $\widehat{Q}^\star$ 满足鞍点方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta Q}\Big|_{\widehat{Q}=\widehat{Q}^\star}&=-\frac{1}{J^2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\ \widehat{Q}^\star+\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\Big\langle\tilde{x}(t)\tilde{x}(t')\Big\rangle_{\mathcal{L}}=0 &(15a)\\
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\widehat{Q}}\Big|_{Q=Q^\star}&=-\frac{1}{J^2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\ Q^\star+\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\Big\langle\phi\big(x(t)\big)\phi\big(x(t')\big)\Big\rangle_{\mathcal{L}}=0 &(15b)
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
Q^\star(t,t')&=J^2\Big\langle\phi\big(x(t)\big)\phi\big(x(t')\big)\Big\rangle_{\mathcal{L}}=J^2C(t,t') &(16a)\\
\widehat{Q}^\star(t,t')&=\frac{J^2}{2}\Big\langle\tilde{x}(t)\tilde{x}(t')\Big\rangle_{\mathcal{L}}=0 &(16b)
\end{aligned}
$$

其中 $\langle\bullet\rangle_{\mathcal{L}}$ 是对 $\mathcal{L}$ 的最小值决定的 x 和 $\hat{x}$ 的所有轨迹做平均：

$$
\langle\bullet\rangle_{\mathcal{L}}=\frac{1}{Z[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}]}\int \mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\ \bullet\ e^{\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\frac{1}{2}(\mathbf{x}^t)^\top Q\,\mathbf{x}_{t'}+(\phi^t)^\top\widehat{Q}\,\phi^{t'}} \tag{17}
$$

因此积分的结果为

$$
\begin{aligned}
&\overline{Z[j,\tilde{j}]} \\
&= \int \mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}] \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_i \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, Q^\star \tilde{x}_i^t\, \tilde{x}_i^{t'} + \sum_i \int \mathrm{d}t \left[\tilde{x}_i(\partial_t+1)x_i + \frac{g}{2}\tilde{x}_i^2 + j_i x_i + \tilde{j}_i\tilde{x}_i\right]\right\} && \text{(18a)} \\
&= \int \mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}] \exp\left\{\sum_i \int \mathrm{d}t \left[\tilde{x}_i(\partial_t+1)x_i + j_i x_i + \tilde{j}_i\tilde{x}_i\right] + \frac{1}{2}\sum_i \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \left(J^2 C(t,t') + g\delta(t-t')\right)\tilde{x}_i^t\tilde{x}_i^{t'}\right\} && \text{(18b)}
\end{aligned}
$$

式 (18b) 中的第一项对应动力学方程 $\partial_t x = -x$，第二项对应噪声项。因此 $\overline{Z[j,\tilde{j}]}$ 是动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + \xi(t) + \eta(t) \tag{19}$$

的生成泛函，其中 $\xi(t)$ 是高斯白噪声，另一个噪声项 η 满足

$$\left\langle \eta(t)\eta(t') \right\rangle = J^2 C(t,t') \tag{20}$$