考虑如下随机动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -x_i + \eta_i \tag{1}$$

其中，色噪声 $\eta_i = \sum_{j=1}^{N} J_{ij}\phi(x_j)$，激活函数 $\phi(x) = \tanh(x)$，神经元之间的耦合强度 $J_{ij} \sim \mathcal{N}\left(0, g^2/N\right)$

这是一种典型的随机循环神经网络（random RNN），这里首先介绍 1988 年 Haim Sompolinsky 等人使用动力学平均场理论（DMFT）对这个模型进行的分析

在大 N 极限 [1] 和长时极限下 [2]，计算 η_i^t 的均值和关联函数 [3]

$$\langle\eta_i^t\rangle = \sum_j \left\langle J_{ij}\phi\left(x_j^t\right)\right\rangle = 0 \tag{2a}$$

$$\langle\eta_i^t\eta_j^{t+\tau}\rangle = \left\langle \sum_k J_{ik} \sum_l J_{jl}\phi\left(x_k^t\right)\phi\left(x_l^{t+\tau}\right)\right\rangle = \delta_{ij}g^2C(\tau) \tag{2b}$$

其中发放率的自关联函数 $C(\tau) \equiv \langle\phi\left(x_i^t\right)\phi\left(x_i^{t+\tau}\right)\rangle$ 含有非线性函数，为了计算方便，我们考虑局域电流 x_i^t 的自关联函数 $\Delta(\tau) \equiv \langle x_i^t x_i^{t+\tau}\rangle$

将式 (1) 做傅里叶变换，得到 [4]

$$(1 + \mathrm{i}\omega)\,\hat{x}\,(\omega) = \hat{\eta}\,(\omega) \tag{3a}$$

$$(1 - \mathrm{i}\omega)\,\hat{x}\,(-\omega) = \hat{\eta}\,(-\omega) \tag{3b}$$

两式相乘，得到

$$\left(1 + \omega^2\right)\hat{x}\,(\omega)\,\hat{x}\,(-\omega) = \hat{\eta}\,(\omega)\,\hat{\eta}\,(-\omega) \tag{4}$$

将式 (4) 做逆傅里叶变换，得到关于 $\Delta\,(\tau)$ 的微分方程 [5] [6]

$$\Delta - \ddot{\Delta} = g^2C\,(\tau) \tag{5}$$

[1] 可以应用中心极限定理

[2] 利用各态历经假设，可以得到时序平均等于系综平均

[3] 式 (2b) 中利用了 J_{ij} 的统计性质 $\langle J_{ik}J_{jl}\rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}g^2/N$

[4] 定义 $\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}\left[x\,(t)\right] = \int \mathrm{d}t\, x\,(t)\, e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 以及 $\hat{\eta}(\omega) = \mathcal{F}\left[\eta\,(t)\right] = \int \mathrm{d}t\,\eta\,(t)\, e^{-\mathrm{i}\omega t}$，并且利用傅里叶变换的微分性质 $\mathcal{F}\left[\partial_t x\right] = -\mathrm{i}\omega\mathcal{F}\left[x\right]$

[5] 等式左边的计算如下

$$\begin{aligned}\mathrm{l.h.s} &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\left(1+\omega^2\right)\hat{x}\,(\omega)\,\hat{x}\,(-\omega)\,e^{\mathrm{i}\omega\tau} = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\left(1-(i\omega)^2\right)\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,x(t)x(t')\,e^{-\mathrm{i}\omega(t'+\tau-t)} = \left(1-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\right)\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,x(t)x(t')\,\delta\,(t-t'-\tau)\\ &= \left(1-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\right)\Delta\,(\tau)\end{aligned}$$

等式右边的计算同理

$$\mathrm{r.h.s} = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\,\hat{\eta}\,(\omega)\,\hat{\eta}\,(-\omega)\,e^{\mathrm{i}\omega\tau} = \left\langle\eta\,(t)\,\eta\,(t+\tau)\right\rangle = g^2C\,(\tau)$$

[6] 此外，可以直接考虑 $\Delta\,(\tau)$ 的二阶微分：

首先计算一阶微分

$$\dot{\Delta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \langle x(t)\dot{x}(t+\tau)\rangle = \Big\langle x(t)\Big(-x(t+\tau)+\eta(t+\tau)\Big)\Big\rangle = -\Delta + \big\langle x(t)\eta(t+\tau)\big\rangle$$

因此

$$\ddot{\Delta} = -\dot{\Delta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big\langle x(t)\eta(t+\tau)\big\rangle = -\dot{\Delta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big\langle x(t-\tau)\eta(t)\big\rangle = -\dot{\Delta} + \big\langle x(t-\tau)\eta(t)\big\rangle - \big\langle\eta(t-\tau)\eta(t)\big\rangle = -\dot{\Delta} + \big\langle x(t)\eta(t+\tau)\big\rangle - \big\langle\eta(t)\eta(t+\tau)\big\rangle = \Delta - g^2C\,(\tau)$$

在第二个等号处，使用了如下时间平移变换，并且在第四个等号处变换回来

$$\big\langle x(t)\eta(t+\tau)\big\rangle = \int \mathrm{d}t\,x(t)\eta(t+\tau) = \int \mathrm{d}t'\,x(t'-\tau)\eta(t') = \big\langle x(t-\tau)\eta(t)\big\rangle$$

式 (5) 的形式启发我们将其改写为一个牛顿动力学方程

$$\ddot{\Delta} = -\frac{\partial V}{\partial \Delta} \tag{6}$$

为了确定势函数的形式，将 $C(\tau)$ 改写为 [7]

$$C(\tau) = \int Dz_1 \int Dz_2 \int Dz_3\, \phi\left(\alpha z_1 + \beta z_2\right) \phi\left(\alpha z_1 + \beta z_3\right) = \int Dz_1 \left[\int Dz_2\, \phi\left(\alpha z_1 + \beta z_2\right)\right]^2 \tag{7}$$

利用 Price 定理可以确定 [8]

$$V = -\frac{1}{2}\Delta^2 + g^2 \int Dz_1 \left[\int Dz_2\, \Phi\left(\sqrt{\Delta_0 - |\Delta|}\, z_2 + \sqrt{\Delta}\, z_1\right)\right]^2 \tag{8}$$

其中 $\Phi(x) = \int_0^x \mathrm{d}y\, \phi(y)$，对于 $\phi(x) = \tanh(x)$，$\Phi(x) = \ln\cosh(x)$。式 (6) (8) 描述了单粒子在保守势场中的运动

---

[7] 注意到 $\langle x(t)\rangle = \langle x(t+\tau)\rangle = 0$，$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \Delta(\tau)$，定义 $\alpha = \sqrt{|\Delta|}$，$\beta = \sqrt{\Delta_0 - |\Delta|}$，重参数化 $x(t) = \alpha z_1 + \beta z_2$，$x(t+\tau) = \alpha z_1 + \beta z_3$

[8] Price 定理的一种表述：

考虑具有协方差 ρ 的两个高斯随机变量 x_1 和 x_2，满足联合概率分布 $p\left(x_1, x_2, \rho\right)$，对任意函数 $f\left(x_1, x_2\right)$，定义其期望

$$F\left[f\right] = \left\langle f\left(x_1, x_2\right)\right\rangle = \iint f\left(x_1, x_2\right) p\left(x_1, x_2, \rho\right)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

则有

$$\frac{\partial^n}{\partial \rho^n} F\left[f\right] = F\left[\frac{\partial^{2n}}{\partial x_1^n \partial x_2^n} f\right]$$

证明：（方便起见，假设 x_1 和 x_2 都是零均值的）

联合概率分布 $p\left(x_1, x_2, \rho\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)}\right]$ 的 Fourier 变换为 $P\left(k_1, k_2, \rho\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(k_1^2 + k_2^2 - 2\rho k_1 k_2\right) + \mathrm{i}x_1 k_1 + \mathrm{i}x_2 k_2\right]$

利用 Fourier 变换的微分性质，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n F}{\partial \rho^n} &= \iint f\left(x_1, x_2\right) \left[\iint \frac{\partial^n P}{\partial \rho^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1 k_1 - \mathrm{i}x_2 k_2} \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2\right] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint P\left(k_1, k_2, \rho\right) \left(-k_1 k_2\right)^n \left[\iint f\left(x_1, x_2\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1 k_1 - \mathrm{i}x_2 k_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right] \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 \\
&= \iint P\left(k_1, k_2, \rho\right) \left[\iint \frac{\partial^{2n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1 k_1 - \mathrm{i}x_2 k_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right] \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 = \iint \frac{\partial^{2n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^n} \left[\iint P\left(k_1, k_2, \rho\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1 k_1 - \mathrm{i}x_2 k_2} \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2\right] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \iint \frac{\partial^{2n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^n} p\left(x_1, x_2, \rho\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = F\left[\frac{\partial^{2n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^n}\right]
\end{aligned}$$

■

考虑如下随机微分方程

$$\partial_t x = f(x) + \xi(t) \tag{9}$$

其中，$f(x)$ 是动力学过程的非线性函数，$\xi(t)$ 是噪声。采用 Ito 约定，将方程离散化为

$$\psi(x_t) \equiv x_t - \left[x_{t-1} + f(x_{t-1})\Delta t + \xi_t \Delta t + x_0 \delta_{t0}\right] = 0 \tag{10}$$

我们的目标是得到 x 的动力学路径的概率分布 $P[x(t)]$，其离散化形式可以写为

$$p(x_1, \cdots, x_N) = \prod_{t=1}^{N} \int \mathrm{d}\xi_t\, \rho(\xi_t)\, \delta\big(x_t - x_t^\star(x_{t-1}, \xi_t)\big) \tag{11}$$

其中 $x_t^\star(x_{t-1}, \xi_t)$ 是方程 (10) 的解，也就是函数 $\psi(x_t) = 0$ 的零点，并且是唯一的。利用狄拉克 δ 函数的复合性质以及其傅里叶积分表示，可以得到

$$\delta\big(x_t - x_t^\star(x_{t-1}, \xi_t)\big) = |\psi'(x_t)|\, \delta\big(\psi(x_t)\big) = \delta\big(\psi(x_t)\big) = \int \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_t}{2\pi i}\, e^{\tilde{x}_t \psi(x_t)} \tag{12}$$

因此可以将式 (11) 改写为

$$\begin{aligned}
& p(x_1, \cdots, x_N) \\
&= \prod_t \int \mathrm{d}\xi_t\, \rho(\xi_t) \int \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_t}{2\pi i}\, e^{\tilde{x}_t \psi(x_t)} && \text{(13a)} \\
&= \prod_t \int \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_t}{2\pi i} \left[\int \mathrm{d}\xi_t\, e^{-\tilde{x}_t \xi_t \Delta t} \rho(\xi_t)\right] \exp\left[\tilde{x}_t \big(x_t - x_{t-1} - f(x_{t-1})\Delta t - x_0 \delta_{t0}\big)\right] && \text{(13b)} \\
&= \int \left[\prod_t \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_t}{2\pi i}\right] \left[\prod_t \int \mathrm{d}\xi_t\, e^{-\tilde{x}_t \xi_t \Delta t} \rho(\xi_t)\right] \exp\left[\sum_t \tilde{x}_t \left(\frac{x_t - x_{t-1}}{\Delta t} - f(x_{t-1}) - x_0 \frac{\delta_{t0}}{\Delta t}\right)\Delta t\right] && \text{(13c)}
\end{aligned}$$

在 $N \to \infty$，$\Delta t \to 0$ 的极限下，利用 $\frac{x_t - x_{t-1}}{\Delta t} \to \partial_t x$，$\frac{\delta_{t0}}{\Delta t} \to \delta(t)$ 和 $\sum_{t=1}^{N} \Delta t \to \int \mathrm{d}t$，并且定义噪声过程的矩生成泛函

$$Z_\xi[-\tilde{x}(t)] = \lim_{N\to\infty} \prod_t \int \mathrm{d}\xi_t\, e^{-\tilde{x}_t \xi_t \Delta t} \rho(\xi_t) \tag{14}$$

可以将 $p(x_1, \cdots, x_N)$ 重新写回连续形式

$$p[x(t)] = \int D\tilde{x}\, Z_\xi[-\tilde{x}(t)] \exp\left[\int \mathrm{d}t\, \tilde{x}\big(\partial_t x - f(x) - x_0 \delta(t)\big)\right] \tag{15}$$

为了得到概率分布 $p[x(t)]$ 中的统计量，我们可以定义所谓的矩生成泛函

$$\begin{aligned}
Z[j(t)] &\equiv \int Dx\, e^{\int j(t)x(t)\,\mathrm{d}t}\, p[x(t)] && \text{(16a)} \\
&= \int Dx \int D\tilde{x}\, Z_\xi[-\tilde{x}(t)] \exp\left\{\int \mathrm{d}t \left[\tilde{x}\big(\partial_t x - f(x) - x_0 \delta(t)\big) + jx\right]\right\} && \text{(16b)}
\end{aligned}$$

其中 $j(t)$ 被称为源场。更一般地，我们可以给系统 (9) 施加一个扰动场 $\tilde{j}(t)$，动力学方程改写为

$$\partial_t x = f(x) - \tilde{j}(t) + \xi(t) \tag{17}$$

通过替换 $f(x) \to f(x) - \tilde{j}(t)$，可以得到包含扰动场的矩生成泛函

$$Z[j,\tilde{j}] = \int Dx \int D\tilde{x}\; Z_\xi[-\tilde{x}] \exp\left\{\int \mathrm{d}t \left[\tilde{x}\Big(\partial_t x - f(x) - x_0\delta(t)\Big) + jx + \tilde{j}\tilde{x}\right]\right\} \tag{18}$$

将与动力学方程本身有关的项定义为作用量

$$S[x,\tilde{x}] = \int \mathrm{d}t\; \tilde{x}\Big(\partial_t x - f(x) - x_0\delta(t)\Big) \tag{19}$$

将噪声的矩生成泛函用其累积生成泛函表示

$$W_\xi[-\tilde{x}(t)] = \ln Z_\xi[-\tilde{x}(t)] = \lim_{N\to\infty} \ln \prod_t \int \mathrm{d}\xi_t\; e^{-\tilde{x}_t\xi_t\Delta t}\rho(\xi_t) \tag{20}$$

这样，生成泛函写为

$$Z[j,\tilde{j}] = \int D[x,\tilde{x}]\; \exp\left(S[x,\tilde{x}] + W_\xi[-\tilde{x}] + j^\top x + \tilde{j}^\top \tilde{x}\right) \tag{21}$$

*** *** *** *** ***

对于常见的高斯白噪声，我们一般写为如下形式

$$\langle \xi(t)\rangle = 0 \qquad \langle \xi(t)\xi(t')\rangle = g^2\delta(t-t') \tag{22}$$

采用 $\delta(t-t') \to \frac{1}{\Delta t}$ 的离散化方案，ξ_t 的方差为 $g^2/\Delta t$，概率密度写为

$$\rho(\xi_t) = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2\pi}g}\exp\left(-\frac{\xi_t^2\Delta t}{2g^2}\right) \tag{23}$$

因此噪声的矩生成泛函为

$$\begin{aligned}
Z_\xi[-\tilde{x}] &= \lim_{N\to\infty}\prod_t \int \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2\pi}g}\mathrm{d}\xi_t\; e^{-\tilde{x}_t\xi_t\Delta t}\exp\left(-\frac{\xi_t^2\Delta t}{2g^2}\right) && \text{(24a)}\\
&= \lim_{N\to\infty}\prod_t \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}g}\mathrm{d}(\xi_t\sqrt{\Delta t})\; e^{-\tilde{x}_t\xi_t\Delta t}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{g^2}(\xi_t\sqrt{\Delta t})^2 - \tilde{x}_t\sqrt{\Delta t}(\xi_t\sqrt{\Delta t})\right] && \text{(24b)}\\
&= \lim_{N\to\infty}\prod_t \exp\left(\frac{1}{2}g^2\tilde{x}_t^2\Delta t\right) && \text{(24c)}\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}g^2\int \tilde{x}^2(t)\,\mathrm{d}t\right) && \text{(24d)}
\end{aligned}$$

噪声累积生成泛函为

$$W_\xi[-\tilde{x}] = \frac{1}{2}g^2\int \tilde{x}^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

考虑一个具有如下形式动力学方程的随机循环神经网络

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -x_i + \sum_{j=1}^{N} J_{ij}\phi(x_j) + \xi_i \tag{26}$$

其中非线性函数 $\phi(x) = \tanh(x)$，J_{ij} 是神经元之间的耦合强度，ξ_i 是高斯白噪声，满足

$$J_{ii} = 0 \qquad \langle J_{ij}\rangle = 0 \qquad \langle J_{ij}^2\rangle = (1-\delta_{ij})\frac{J^2}{N} \tag{27}$$

$$\langle \xi_i(t)\rangle = 0 \qquad \langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = g^2\delta_{ij}\delta(t-t') \tag{28}$$

给定一个耦合矩阵 $\mathbf{J}$，可以写出矩生成泛函

$$Z[\mathbf{j},\tilde{\mathbf{j}}](\mathbf{J}) = \int \mathcal{D}[\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}]\ \exp\left\{\mathbf{S} + \mathbf{j}^\top\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{j}}^\top\tilde{\mathbf{x}} - \sum_i \int \mathrm{d}t\ \tilde{x}_i(t)\sum_j J_{ij}\phi\big(x_j(t)\big)\right\} \tag{29}$$

其中定义了

$$\mathbf{S} = \sum_i \int \mathrm{d}t\left[\tilde{x}_i(\partial_t + 1)x_i + \frac{1}{2}g^2\tilde{x}_i^2\right] \tag{30}$$

将矩生成泛函做关于 $\mathbf{J}$ 的无序平均，可以得到

$$\overline{Z[\mathbf{j},\tilde{\mathbf{j}}]} \equiv \langle Z[\mathbf{j},\tilde{\mathbf{j}}](\mathbf{J})\rangle_{\mathbf{J}} = \int \prod_{i,j}\mathrm{d}J_{ij}\,P(J_{ij})\,Z[\mathbf{j},\tilde{\mathbf{j}}](\mathbf{J}) \tag{31a}$$

$$= \int \mathcal{D}[\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}]\ \exp\left(\mathbf{S} + \mathbf{j}^\top\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{j}}^\top\tilde{\mathbf{x}}\right)\underbrace{\int \prod_{i,j}\mathrm{d}J_{ij}\,e^{-\sum_{i,j}J_{ij}\int \mathrm{d}t\,\tilde{x}_i\phi(x_j)}\,P(J_{ij})}_{\equiv Z_0} \tag{31b}$$

其中

$$Z_0 = \prod_{i\neq j}\int \mathrm{d}J_{ij}\ \exp\left\{-\frac{J_{ij}^2}{2J^2/N} - J_{ij}\int \mathrm{d}t\ \tilde{x}_i\phi(x_j)\right\} \tag{32a}$$

$$= \exp\left\{\frac{J^2}{2N}\sum_{i\neq j}\left(\int \mathrm{d}t\ \tilde{x}_i\phi(x_j)\right)^2\right\} \tag{32b}$$

$$= \exp\left\{\frac{J^2}{2N}\sum_{i\neq j}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\ \tilde{x}_i^t\,\phi_j^t\,\tilde{x}_i^{t'}\,\phi_j^{t'}\right\} \tag{32c}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\left[\left(\sum_i \tilde{x}_i^t\,\tilde{x}_i^{t'}\right)\left(\frac{J^2}{N}\sum_j \phi_i^t\,\phi_i^{t'}\right)\right]\right\} \tag{32d}$$

式 (32c) 中的被积函数可以利用 $\sum_{i\neq j}x_iy_j = \sum_{i,j}x_iy_j - \sum_i x_iy_i = \sum_i x_i\sum_j y_j - \sum_i x_iy_i$ 拆分为两项，第二项相比第一项是一个 $O(1/N)$ 的小量，可以略去。因此

$$\overline{Z[\mathbf{j},\tilde{\mathbf{j}}]} = \int \mathcal{D}[\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}]\ \exp\left\{\mathbf{S} + \mathbf{j}^\top\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{j}}^\top\tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\left[\left(\sum_i \tilde{x}_i^t\,\tilde{x}_i^{t'}\right)\left(\frac{J^2}{N}\sum_j \phi_i^t\,\phi_i^{t'}\right)\right]\right\} \tag{33}$$

引入序参量

$$Q(t,t')=\frac{J^2}{N}\sum_j \phi_i^t\,\phi_i^{t'} \tag{34}$$

可以得到

$$\begin{aligned}
&\overline{Z[\mathbf{j},\mathbf{j}]}\\
&=\int \mathcal{D}Q\;\delta\Big(-\frac{N}{J^2}Q(t,t')+\sum_j \phi_i^t\,\phi_i^{t'}\Big)\int\mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\;\exp\Big(\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}\Big)\\
&\quad\times\exp\Big\{\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\Big[\Big(\sum_i \tilde{x}_i^t\tilde{x}_i^{t'}\Big)\Big(\frac{J^2}{N}\sum_j \phi_i^t\phi_i^{t'}\Big)\Big]\Big\} &\text{(35a)}\\
&=\int \mathcal{D}[Q,\widehat{Q}]\;\exp\Big\{\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\;\widehat{Q}(t,t')\Big[-\frac{N}{J^2}Q(t,t')+\sum_j \phi_i^t\,\phi_i^{t'}\Big]\Big\}\\
&\quad\times\int\mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\;\exp\Big\{\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\;Q(t,t')\sum_i \tilde{x}_i^t\,\tilde{x}_i^{t'}\Big\} &\text{(35b)}\\
&=\int \mathcal{D}[Q,\widehat{Q}]\;\exp\Big(-\frac{N}{J^2}Q^\top\widehat{Q}\Big)\int\mathcal{D}[\mathbf{x},\mathbf{x}]\;\exp\Big(\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\mathbf{j}^\top\mathbf{x}+\frac{1}{2}(\mathbf{x}^t)^\top Q\,\mathbf{x}_{t'}+(\phi^t)^\top\widehat{Q}\,\phi^{t'}\Big) &\text{(35c)}
\end{aligned}$$

注意到式 (35c) 的第二项积分中已经将不同神经元解耦，可以将其写为

$$N\ln Z[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}]=\sum_i \ln\int\mathcal{D}[\tilde{x}_i,x_i]\exp\Big(S_i+j_i^\top x_i+\tilde{j}_i^\top\tilde{x}_i+\frac{1}{2}(\tilde{x}_i^t)^\top Q\,\tilde{x}_i^{t'}+(\phi_i^t)^\top\widehat{Q}\,\phi_i^{t'}\Big) \tag{36}$$

因此有

$$\overline{Z[j,\tilde{j}]}=\int\mathcal{D}[Q,\widehat{Q}]\,e^{N\mathcal{L}[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}]} \tag{37}$$

其中

$$\mathcal{L}[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}]=-\frac{N}{J^2}Q^\top\widehat{Q}+\ln Z[j,\tilde{j};Q,\widehat{Q}] \tag{38}$$

在 $N\to\infty$ 的极限下，利用 Laplace 方法可以求解式 (37) 中的积分

$$\overline{Z[j,\tilde{j}]}=e^{N\mathcal{L}[j,\tilde{j};Q^\star,\widehat{Q}^\star]} \tag{39}$$

其中 $Q^\star$ 和 $\widehat{Q}^\star$ 满足鞍点方程

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta Q}\Big|_{\widehat{Q}=\widehat{Q}^\star}&=-\frac{1}{J^2}\iint\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\;\widehat{Q}^\star+\frac{1}{2}\iint\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\Big\langle\tilde{x}(t)\tilde{x}(t')\Big\rangle_{\mathcal{L}}=0 &\text{(40a)}\\
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\widehat{Q}}\Big|_{Q=Q^\star}&=-\frac{1}{J^2}\iint\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\;Q^\star+\iint\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\Big\langle\phi\big(x(t)\big)\phi\big(x(t')\big)\Big\rangle_{\mathcal{L}}=0 &\text{(40b)}
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
Q^\star(t,t')&=J^2\Big\langle\phi\big(x(t)\big)\phi\big(x(t')\big)\Big\rangle_{\mathcal{L}}=J^2C(t,t') &\text{(41a)}\\
\widehat{Q}^\star(t,t')&=\frac{J^2}{2}\Big\langle\tilde{x}(t)\tilde{x}(t')\Big\rangle_{\mathcal{L}}=0 &\text{(41b)}
\end{aligned}$$

其中 $\langle \bullet \rangle_{\mathcal{L}}$ 是对 $\mathcal{L}$ 的最小值决定的 x 和 $\hat{x}$ 的所有轨迹做平均：

$$\langle \bullet \rangle_{\mathcal{L}} = \frac{1}{Z[j, \tilde{j}; Q, \widehat{Q}]} \int \mathcal{D}[\mathbf{x}, \mathbf{x}] \bullet e^{\mathbf{S}+\mathbf{j}^\top \mathbf{x}+\mathbf{j}^\top \mathbf{x}+\frac{1}{2}(\mathbf{x}^t)^\top Q\, \mathbf{x}_{t'}+(\phi^t)^\top \widehat{Q}\, \phi^{t'}} \tag{42}$$

因此积分的结果为

$$\begin{aligned} &\overline{Z[j, \tilde{j}]} \\ &= \int \mathcal{D}[\mathbf{x}, \mathbf{x}] \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_i \iint \mathrm{d}t \mathrm{d}t'\, Q^\star \tilde{x}_i^t\, \tilde{x}_i^{t'} + \sum_i \int \mathrm{d}t \left[\tilde{x}_i (\partial_t + 1) x_i + \frac{g}{2} \tilde{x}_i^2 + j_i x_i + \tilde{j}_i \tilde{x}_i \right] \right\} &(43a) \\ &= \int \mathcal{D}[\mathbf{x}, \mathbf{x}] \exp\left\{ \sum_i \int \mathrm{d}t \left[\tilde{x}_i (\partial_t + 1) x_i + j_i x_i + \tilde{j}_i \tilde{x}_i \right] + \frac{1}{2} \sum_i \iint \mathrm{d}t \mathrm{d}t' \left(J^2 C(t, t') + g \delta(t - t') \right) \tilde{x}_i^t \tilde{x}_i^{t'} \right\} &(43b) \end{aligned}$$

式 (43b) 中的第一项对应动力学方程 $\partial_t x = -x$，第二项对应噪声项。因此 $\overline{Z[j, \tilde{j}]}$ 是动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + \xi(t) + \eta(t) \tag{44}$$

的生成泛函，其中 $\xi(t)$ 是高斯白噪声，另一个噪声项 η 满足

$$\left\langle \eta(t) \eta(t') \right\rangle = J^2 C(t, t') \tag{45}$$